Apellido: .... Nombre: ....

Legajo:................................

MATEMATICA SUPERIOR – RECUPERATORIO 2^{do} Parcial

TEMA : **25**

1				2		3			4	Nota Final
1 p.	1 p.	1 p.	1 p.	1 p.	1 p.	1.5 p.	1.5 p.	1 p.	2 p.	

Para aprobar es necesario sumar 6 puntos. La nota es n = p – 2 Tiempo disponible: 90 minutos

Entregue todo en TINTA y con las hojas numeradas.

Ejercicio nº 1: Sea: $f(x) = 4 \cdot \text{sen}(\pi x) - x^2 + 2x + 5$ indique V o F justificando:

a) La función dada tiene únicamente 2 raíces reales.

b) En [-2.5;-1.5] se puede aplicar el método de Regula-Falsi para hallar una raíz fijando el -1.5

c) Partiendo del intervalo [2;4] para hallar una raíz son suficientes 15 iteraciones utilizando el método de Bisección para asegurar un error menor que 10^{-4}.

d) La función $g(x) = \dfrac{x^2 - 5 - 4\,\text{sen}(\pi x)}{2}$ converge por el método de Punto Fijo a la mayor raíz de f.

Ejercicio nº 2: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (Su inversa: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.48 & -0.12 & -0.4 \\ -0.28 & 0.32 & 0.4 \\ -0.32 & 0.08 & 0.6 \end{pmatrix}$)

a) Indique si A es diagonalmente dominante y si es definida positiva.

b) Halle la condición de la matriz A tomando normas infinito, e indique si corresponde a un sistema bien o mal condicionado.

Ejercicio nº 3: Dada la siguiente tabla de datos:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	12	22	16	0	-20	-38

a) Complete:

Por todos los puntos dados pasan: .... polinomios de grado 2

Por todos los puntos dados pasan: .... polinomios de grado 3

Por todos los puntos dados pasan: .... polinomios de grado 5

Por todos los puntos dados pasan: .... polinomios de grado 6

b) Si es posible calcule la integral de la función dada entre -2 y 3 por Simpson, de lo contrario por Trapecios.

c) Estime la derivada primera en x= -2 y en x= 0. Justifique las fórmulas halladas.

Ejercicio nº 4: Aproxime la función: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en [1,2] por una recta de mínimos cuadrados.

RESPUESTAS:

Ej. 1) $f(x) = 4 \cdot sen(\pi x) - x^2 + 2x + 5$

a) FALSO, hay 4 raíces reales: [-2;-1.5] , [-1;-0.5] , [-0.5; 0] y [3 ; 3.5]

b) VERDADERO. $f'(x) = 4 \cdot \pi \cdot \cos(\pi x) - 2x + 2$ $f''(x) = -4 \cdot \pi^2 sen(\pi x) - 2$

Las dos son positivas en el intervalo [-2.5;-1.5], se fija el b.

c) VERDADERO. $2/2^n < 10^{-4} \Rightarrow 10^4 < 2^{n-1} \Rightarrow 4 < (n-1) \log(2) \Rightarrow n - 1 > 4/\log(2)$

$\Rightarrow n > 14.28$ Entonces 15 iteraciones son suficientes.

d) FALSO. $g(x) = \dfrac{x^2 - 5 - 4\ sen(\pi x)}{2} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{2x - 4\pi \cos(\pi x)}{2}$ es mayor que 1 en [3; 3.5]

Ej. 2)

a) SI, es diagonal dominante y también definida positiva (Los 3 determinantes de submatrices superiores izquierdas con positivos: dan 4, 15 y 25)

b) Norma infinito de A: 7, norma infinito de A^{-1} : 1 Condición de A: k(A) = 7

No es un valor muy grande, podría decirse que el sistema no está mal condicionado.

Ej. 3) a) Usando diferencias finitas (por ser equiespaciados)

-2	12					
-1	22	10				
0	16	-6	-16			
1	0	-16	-10	6		
2	-20	-20	-4	6	0	
3	-38	-18	2	6	0	0

Entonces pasa un polinomio de grado 3.

Por lo tanto, ninguno de grado 2, ninguno de grado 5 pero infinitos de grado 6.

b) No se puede por Simpson pues n=5.

Por trapecios: A = ½ (12 + (-38) + 2 • (22+16+0-20)) = 5

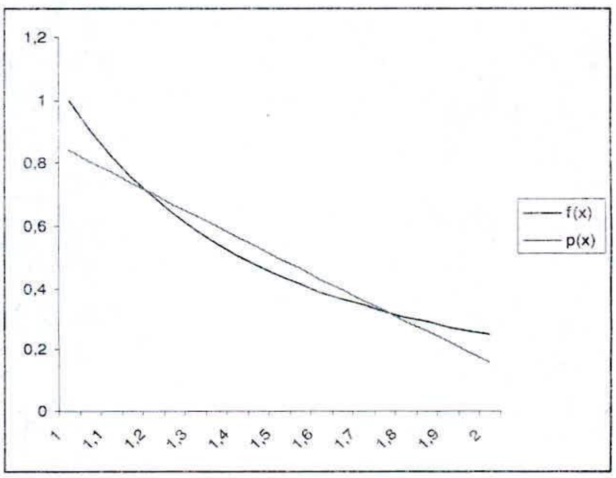
c) f'(-2) = 22- 12 = 10 (progresiva) ; f'(0) = (0 - 22) / 2 = -11 (central)

Ej. 4) Por sistema de ecuaciones:

1	1,5	0,5
1,5	2,33333333	0,69314718

$\Rightarrow a_0 = 1{,}52335075 \wedge a_1 = -0{,}68223383$

$\Rightarrow p(x) = 1{,}52335075 - 0{,}68223383\, x$



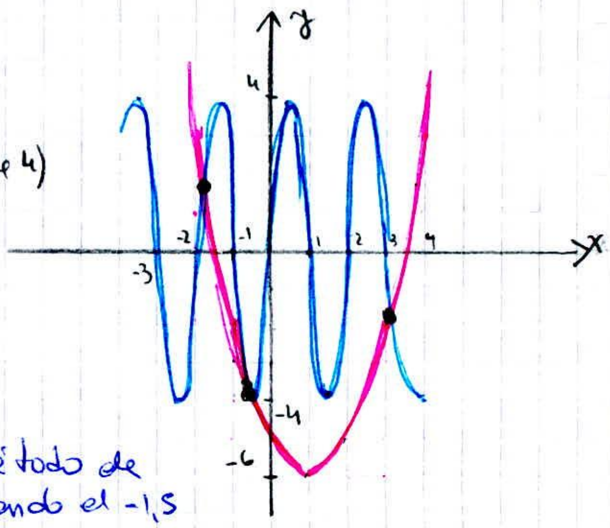
tema 25

Mat Sup 2° parcial (recup)

① Sea $f(x) = 4\,sen(\pi x) - x^2 + 2x + 5$. Indique V o F, justificando:

a) la función dada tiene únicamente 2 raíces reales.

$\underbrace{4\,sen(\pi x)} = x^2 - 2x - 5 = (x-1)^2 - 6$



$\boxed{F}$ tiene 3 raíces reales (al menos)
(en realidad tiene 4)

1 raíz $\in [-2;-1]$

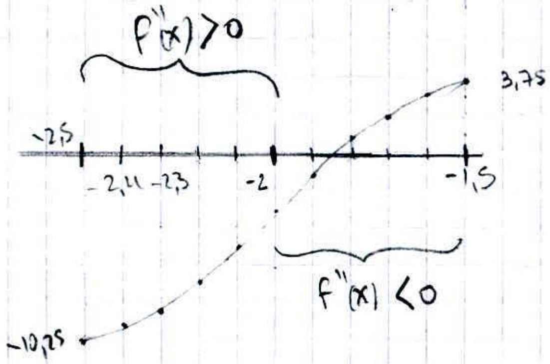
1 raíz $\in [-1;0]$

1 raíz $\in [3;4]$

b) En $[-2,5;-1,5]$ se puede aplicar el método de Regula Falsi para hallar una raíz fijando el $-1,5$

$a = -2,5$ $\quad f(x) = 4\,sen(\pi x) - x^2 + 2x + 5$

$b = -1,5$ $\quad f'(x) = 4\pi\cos(\pi x) - 2x + 2 \rightarrow f''(x) = -4\pi^2 sen(\pi x) - 2$



$\boxed{F}$

$f'(x) > 0 \ \forall x \in [-2,5;-1,5]$

la raíz se encuentra en $[-2;-1,5]$ y en ese intervalo: $f'(x) > 0 \wedge f''(x) < 0$

c) Partiendo del intervalo $[2;4]$ para hallar una raíz son suficientes 15 iteraciones utilizando el método de Bisección para asegurar un error menor que 10^{-4}

$\varepsilon = \frac{b-a}{2^n} < 10^{-4} \rightarrow \frac{2}{2^n} < 10^{-4} \rightarrow 10^4 < 2^{n-1} \rightarrow \log(10^4) < \log(2^{n-1})$

$\rightarrow \frac{4\log(10)}{\log(2)} < n-1 \rightarrow \frac{4}{\log(2)} + 1 < n \rightarrow n > 14,28$

d) La función $g(x) = \frac{x^2 - 5 - 4\,sen(\pi x)}{2}$ converge por el método de punto fijo

$g'(x) = \frac{2x - 4\pi\cos(\pi x)}{2}$ $\quad |g'(x)| > 1 \quad \forall x \in [2;2,32) \cup (2,43;4]$

$\boxed{F}$

② Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (con $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,48 & -0,12 & -0,4 \\ -0,28 & 0,32 & 0,4 \\ -0,32 & 0,08 & 0,6 \end{pmatrix}$),

a) Indique si A es diagonalmente dominante y si es definida positiva

Es diagonalmente dominante y es definida positiva (sus tres determinantes son +)

b) Halle la condición de la matriz A tomando normas infinito, e indique si corresponde a un sistema bien o mal condicionado

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Sigma f_1 = 7 \\ \Sigma f_2 = 7 \\ \Sigma f_3 = 5 \end{matrix} \rightarrow \|A\|_\infty = 7 \quad , \|A^{-1}\|_\infty = 1$$

Condición de A $\rightarrow k(A) = 7$ no es un valor muy grande
$\therefore$ No está mal condicionado

---

③ Dada la sig tabla de datos:

i	0	1	2	3	4	5
x	-2	-1	0	1	2	3
y	12	22	16	0	-20	-38

$h = 1$ equiespaciado

a) Complete:

Por todos los puntos dados pasan 0 polinomios de grado 2
" " " " " " 1 " grado 3
" " " " " " 0 " grado 5
" " " " " " ∞ " " 6

f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$		
12	10	-16	6	0	0
22	-6	-10	6	0	
16	-16	-4	6		
0	-20	2			
-20	-18				
-38					

polin. interpolante (grado mínimo) = grado 3

b) Si es posible calcule la integral de la función dada entre -2 y 3 por Simpson, de lo contrario por trapecios

No se puede resolver por Simpson pues hay 5 intervalos

$$A_T = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_5 + 2\left(y_1 + y_2 + y_3 + y_4\right)\right) = \frac{1}{2}\left(12 + (-38) + 2(22 + 16 + 0 - 20)\right) = \boxed{5 = A_T}$$

c) Estime la derivada primera en $x = -2$ y en $x = 0$. Justifique fórmulas halladas

$$f'(-2) = \frac{f(-1) - f(-2)}{1} = 22 - 12 = \boxed{10 = f'(-2)}$$ → Progresiva, pues -2 es el 1° valor

$$f'(0) = \frac{f(1) - f(-1)}{2h} = \frac{0 - 22}{2} = \boxed{-11 = f'(0)}$$ → Central, porque otorga más precisión

(4) Aproxime la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $[1,2]$ por una recta de mínimos cuadrados

$\int_1^2 1\,dx = 1$ $\quad \int_1^2 x\,dx = 1{,}5$ $\quad \int_1^2 x^2\,dx = 2{,}\overline{33}$ $\quad \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = 0{,}5$ $\quad \int_1^2 \overbrace{\frac{1}{x}}^{x f(x)}\,dx = 0{,}693147$

$$\begin{array}{cc} a_0 & a_1 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1{,}5 & 0{,}5 \\ 1{,}5 & 2{,}\overline{33} & 0{,}6931471806 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{l} a_0 = 1{,}523350749 \\ a_1 = -0{,}6822338328 \end{array}$$

$$\boxed{y = 1{,}523350749 - 0{,}6822338328\,x}$$ ✓